TD Physique Statistique n°4 - Températures négatives

La mécanique statistique est un édifice dont les premières pierres ont été posées à la fin du XIX$^{\text{ème}}$ siècle, alors même que la mécanique quantique n'existait pas encore. Alors même que les systèmes (classiques) initialement considérés peuvent être décrits par des paramètres continus, la mécanique quantique a montré que certains paramètres de systèmes microscopiques ne peuvent prendre qu'un nombre limité de valeurs. Le traitement statistique de certains de ces systèmes peut alors conduire à des résultats qui semblent surprenants. Tel est le cas pour des systèmes qui n'ont que deux niveaux d'énergie possibles, dans la suite des spins, pour lesquels on peut envisager l'existence de températures négatives [1].

On considère un système de N spins sans interaction entre eux. Chacun des spins est porteur d'un moment magnétique $\vec{m}$ et le système est placé dans un champ magnétique statique $\vec{B}$. Les spins s'orientent alors parallèlement ($\uparrow$) ou anti-parallèlement ($\downarrow$) au champ. L'énergie de chaque spin dans le champ vaut alors $\epsilon = -\vec{m}\cdot\vec{B} = \pm mB$. L'énergie étant une grandeur définie à une constante additive près, pour simplifier les calculs, nous considérerons que l'énergie d'un spin parallèle ($\uparrow$) vaut $\epsilon = 0$ et celle d'un spin anti-parallèle ($\downarrow$) $\epsilon = 2mB$. On appelle N_+ le nombre de spins ($\uparrow$) et N_- le nombre de spins ($\downarrow$). On supposera en outre que les spins sont indiscernables. Nous allons dans la suite nous intéresser à l'entropie et à l'énergie interne de ce système. Nous en déduirons sa température (au sens de la physique statistique).

1. (a) Exprimer N en fonction de N_+ et N_-.
   (b) Donner l'expression exacte [2] du nombre de configurations possibles $g(N_+, N_-)$ lorsque le nombre de spins ($\downarrow$) est N_-. On l'écrira en fonction de N et de N_-.
2. Calculer l'entropie universelle σ et l'entropie thermodynamique S du système de spins en fonction de N et de N_-. On supposera N très grand, de telle sorte que la formule de Stirling est valable.
3. Trouver la valeur de N_- pour laquelle l'entropie σ est maximale. Tracer grossièrement la courbe $\sigma(N_-)$. Pour cela, on calculera la valeur de $\sigma(N_-)$ en trois points judicieusement choisis.
4. Quelle est l'énergie interne U du système en fonction de N_- et de m lorsque que l'on a N_- spins ($\downarrow$) ?
5. Rappeler la définition de la température τ en fonction de σ et de U.
6. Déterminer le signe de $\frac{\partial\sigma}{\partial U}$ en fonction de N_-. Montrer que si $U > NmB$, la température absolue du système est négative (au sens de la physique statistique).

1. On pourra se reporter à l'article de Purcell et Pound, "A nuclear spin system at negative temperature", Physical Review **81**, 279–280 (1951).
2. On n'utilisera pas la distribution de Gauss dans ce problème.

7. Auriez-vous une interprétation physique concernant l'existence de températures négatives dans le cas d'un système de spins alors que les températures négatives ne peuvent pas exister pour un gaz enfermé dans une boîte ? [3]

3. Ces remarques valent aussi pour d'autres systèmes constitués de sous-systèmes à deux niveaux, tels des lasers.