TD Physique Statistique n°3 - Équilibre thermique

Lorsque l'on amène deux systèmes *isolés* $\mathcal{S}_1$ et $\mathcal{S}_2$, constitués de N_1 et N_2 particules et d'énergies E_1 et E_2, jusqu'au contact thermique, on autorise un tranfert d'énergie entre $\mathcal{S}_1$ et $\mathcal{S}_2$, sans que le nombre de particules N_1 et N_2 pour chaque système change. Le transfert d'énergie se fait de manière à *maximiser* le nombre d'états accessibles par le système global $\mathcal{S} = \mathcal{S}_1 + \mathcal{S}_2$. Lorsque l'*équilibre thermique* est atteint, tous les états du système $\mathcal{S}$ sont accessibles avec une égale probabilité.

On considère ici deux systèmes de spins $(N_1,\ s_1)$ et $(N_2,\ s_2)$ que l'on met en contact thermique. Les deux systèmes sont plongés dans un champ magnétique externe B. Les spins peuvent s'orienter librement soit parallèlement au champ magnétique ($\uparrow$), soit anti-parallèlement ($\downarrow$). Chaque spin possède alors un moment magnétique $m = m_0$ ($\uparrow$) ou $m = -m_0$ ($\downarrow$). Le champ magnétique n'est ici introduit que pour définir l'énergie $U = -mB$ de chaque spin. On suppose qu'il n'influe par sur l'orientation des spins, ce qui est évidemment faux. s_1 et s_2 désignent alors les excès de spin orientés parallèlement pour les deux systèmes. On désigne $N = N_1 + N_2$ le nombre total de spins du système constitué par les deux systèmes de spin, et $s = s_1 + s_2$ l'excès total de spin de ce système.

1. En guise d'illustration, on considère ici le cas particulier où le nombre de particules dans chaque système est réduit : $(N_1 = 2,\ s_1 = 2)$ et $(N_2 = 3,\ s_2 = -1)$.
   Donner toutes les configurations possibles des spins pour $\mathcal{S}_1$ et $\mathcal{S}_2$ *avant* leur mise en contact thermique. Donner toutes les configurations possibles pour le système $\mathcal{S} = \mathcal{S}_1 + \mathcal{S}_2$ *après* la mise en contact thermique. Quelle condition la conservation de l'énergie impose-t-elle aux valeurs possibles de s_1 et s_2 après la mise en contact thermique ?
   Quel est la multiplicité de l'état caractérisé par $s_1 = 2$ et $s_2 = -1$, après le contact thermique ? Quel est le nouvel état du système $(s_1',\ s_2')$ pour lequel la multiplicité est maximisée ? Que peut-on dire sur le transfert thermique entre $\mathcal{S}_1$ et $\mathcal{S}_2$.
2. À partir de maintenant, on considère que N_1 et N_2 sont très grands et que s_1 et s_2 sont quelconques.
   Rappeler les expressions de la multiplicité des états pour les systèmes $\mathcal{S}_1$ et $\mathcal{S}_2$, $g_1 = g(N_1,\ s_1)$ et $g_2 = g(N_2,\ s_2)$.
3. Lorsque l'excès de spin s_1 est fixé, le produit $g_1 \cdot g_2$ est le nombre d'états accessibles au système combiné $\mathcal{S}$.
   Quelle condition la conservation de l'énergie impose-t-elle à s_2 après la mise en contact thermique ? Écrire explicitement $g_1 \cdot g_2$, en fonction de s_1, s, N_1 et N_2.
4. L'état le plus probable du système combiné $\mathcal{S}$ est celui qui a la multiplicité la plus élevée, c'est-à-dire celui qui maximise $g_1 \cdot g_2$. Pour le trouver, il faut trouver les zéros de la dérivée de $g_1 \cdot g_2$ par rapport à s_1. Il est cependant plus pratique de travailler avec $\ln(g_1 \cdot g_2)$.

Montrer que, pour toute fonction f de x, si $\ln[f(x)]$ présente un maximum, il en est de même pour $f(x)$.

5. Utiliser le résultat précédent pour trouver la valeur $\widehat{s_1}$ de s_1 qui maximise $g_1 \cdot g_2$.
6. Calculer alors la valeur $(g_1 \cdot g_2)^{\max}$ prise par $g_1 \cdot g_2$ lorsque $s_1 = \widehat{s_1}$ et l'exprimer en fonction de s et de N. Commenter cette expression.
7. La question est maintenant de connaître l'évolution de $g_1 \cdot g_2$ au voisinage de $(g_1 \cdot g_2)^{\max}$. Pour cela, on écrit s_1 comme $s_1 = \widehat{s_1} + \delta$.
   Exprimer alors $g_1 \cdot g_2$ en fonction de $(g_1 \cdot g_2)^{\max}$ et de δ. Commenter la dépendance de $g_1 \cdot g_2$ en fonction de δ.