TD Physique Statistique n°1 - Systèmes binaires

Ce premier TD se focalise sur le dénombrement d'états pour des systèmes binaires, c'est-à-dire des systèmes constitués de particules ne pouvant prendre que deux états distincts. Les raisonnements mis en œuvre peuvent être adaptés à des sytèmes ternaires, quaternaires, etc. Le dénombrement est à la base de la physique statistique car il permet de prédire les états les plus probables d'un système constitué d'un très grand nombres de particules.

– **Exercice n°1** : Quatre atomes dans deux demi-boîtes

  On considère une boîte contenant 4 atomes indépendants de gaz parfait. Les atomes peuvent se répartir aléatoirement dans la partie gauche ou droite qu'on suppose séparées par une ligne virtuelle. On suppose que les atomes sont *discernables*.

  1. Donner les configurations possibles de ces 4 atomes répartis dans les demi-boîtes gauche et droite.
  2. Donner les multiplicités et probabilités de trouver s ($s = 0, 1, 2, 3, 4$) atomes dans la demi-boîte de gauche.

– **Exercice n°2** : Système constitué de N spins (1)

  Le spin d'une particule (d'un électron par exemple) est une propriété quantique intrinsèque qui décrit son moment magnétique de spin. On considère ici un système de N spins pouvant s'aligner *aléatoirement* vers le haut ($\uparrow$) ou vers le bas ($\downarrow$). La probabilité qu'un spin pointe vers le haut ($\uparrow$) est p (donnée du problème). La probabilité qu'il pointe vers le bas ($\downarrow$) est alors q.

  1. Exprimer $p + q$, ainsi que $p - q$, en fonction de p.
  2. Chaque spin a un moment magnétique $\vec{m}$, pointant vers le haut ($\uparrow$; $+m$) ou vers le bas ($\downarrow$; $-m$), de norme $||\vec{m}|| = m$. Calculer la valeur algébrique moyenne $\overline{m}$ du moment magnétique associé à chaque spin en fonction de p.
  3. Le moment magnétique *total* M du système est la somme des moments magnétiques de tous les spins. Calculer sa valeur moyenne $\overline{M}$, et vérifier que $\overline{\Delta M} = 0$, où $\overline{\Delta M}$ est l'écart moyen à la moyenne $\overline{M}$.
  4. Démontrer que la dispersion (variance, écart quadratique) de M vaut $\overline{\Delta M^2} = 4Npqm^2$.

     Indication : on aura besoin de poser lors du calcul $\overline{M^2} = \overline{\left[\sum_{i=1}^{N} m_i\right]^2} = \overline{\left[\sum_{i=1}^{N} m_i\right]\left[\sum_{j=1}^{N} m_j\right]}$ et de faire apparaître des termes $\overline{m_i m_j}$.

5. Calculer la déviation standard (écart-type, RMS - Root Mean Square) $\sqrt{\overline{\Delta M^2}}$, ainsi que l'écart-type fractionnel défini par $\frac{\sqrt{\overline{\Delta M^2}}}{\overline{M}}$.
6. Que remarque-t-on sur les dépendances de $\overline{M}$, $\sqrt{\overline{\Delta M^2}}$ et $\frac{\sqrt{\overline{\Delta M^2}}}{\overline{M}}$ en fonction de N ? Que dire de la distribution des valeurs de M lorsque N devient très grand ?
7. Retrouver les formules classiques si $p = 1/2$. Commenter les dépendances de $\overline{M}$, $\sqrt{\overline{\Delta M^2}}$ et $\frac{\sqrt{\overline{\Delta M^2}}}{\overline{M}}$ en fonction de N.

– **Exercice n°3** : Jeu égyptien

Les égyptiens jetaient 4 plaques, recto couleur rouge et verso couleur bleue, à la place des dés romains. Le nombre de faces rouges donnait le score 1, 2, 3 ou 4. Le score 6 était obtenu si toutes les faces étaient bleues. Calculer le nombre de façons de faire chacun des scores, et dresser un tableau récapitulatif. Donner aussi la probabilité d'avoir chacun des scores précédents.

– **Exercice n°4** : Système constitué de N spins (2)

On considère un ensemble de N particules de spin. Chaque spin peut s'aligner soit vers le haut ($\uparrow$), soit vers le bas ($\downarrow$), avec une égale probabilité. On définit l'excès de spin par $s = N_+ - N_-$, la différence entre le nombre de spins orientés vers le haut N_+ et vers le bas N_-, avec $N = N_+ + N_-$. Calculer la multiplicité et la probabilité des états suivants de ce système :

1. $N = 5$ et $s = 1$.
2. $N = 5$ et $s = 5$.
3. $N = 10$ et $s = -8$.